LinAlg PVK HS20 12.01.21:

Zeitplan:

Morgen:

- QR mit Givens / Householder
- Untervektorräume
- Basis, Kern & Bild
- Gram-Schmidt
- Verallgemeinerte Norm & Skalarprodukt
- $A^k x$ (Eigenwertproblem)
- Differentialgleichungen 1. Ordn.

Nachmittag:

- Prüfung HS 18
  - ↳ Orthogonalisierung & QR
  - ↳ e^C
  - ↳ Lineare Abbildungen & Abbildungsmatrizen
  - ↳ Basiswechsel
  - ↳ Ausgleichsrechnung mit SVD
  - ↳ Beweisaufgabe (Schur-Zerlegung)
  - ↳ Multiple Choice

QR-Zerlegung mit Givensrotation & Householderspiegelung:

Beispiel Givens:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \underbrace{\boxed{-1}}_{\substack{=0 \\ a_{21}}} & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$$

$\underline{\underline{Q}}$ orthogonal, $\underline{\underline{R}}$ r.o.d.

i) $a_{21} \to 0$

ii)

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underbrace{\boxed{\cdot}}_{a_{31}} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

iii)

$$\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \underbrace{\boxed{-\sin\varphi - \cos\varphi}}_{=0} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix}$$

iv) $\cos\varphi = -\sin\varphi$

$$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 315° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

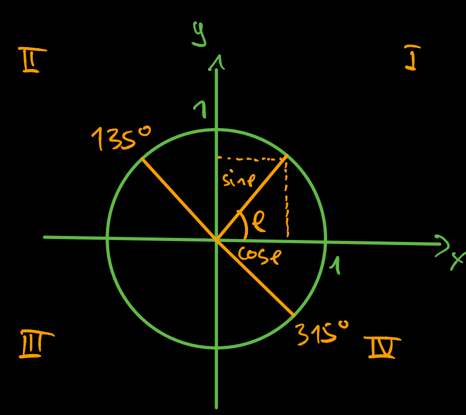
$$\sin 0° = 0 = \frac{\sqrt{0}}{2} = \cos 90°$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \cos 60°$$

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$

$$\sin 90° = 1 = \frac{\sqrt{4}}{2} = \cos 0°$$



v) $G \cdot A = R$

$$A = QR$$
$$= G^T R$$

$$Q = G^T = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}} \quad , \quad R = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}}$$

Falls noch nicht eine r.o.d.

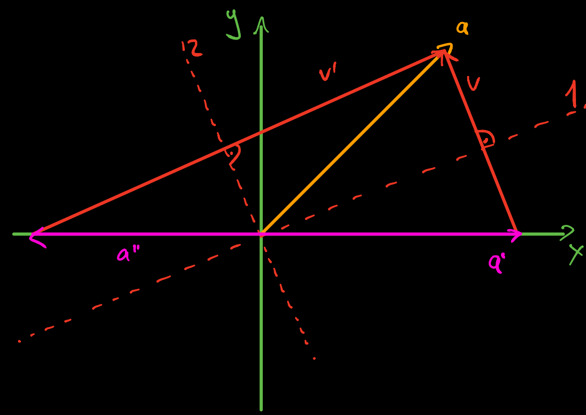
vi) i) - v) für das nächste Element wiederholen

$$\Rightarrow \quad G_2 (\underbrace{G_1 A}_{R'}) = \underline{\underline{R}}$$

$$Q = (G_2 G_1)^T = \underline{\underline{G_1^T G_2^T}}$$

Beispiel Householder:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ \boxed{2} & * & * \\ \boxed{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} := 0$$



i) $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ii) $a' := \|a\| \cdot e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

iii) $v = a \pm a' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$$\boxed{H = \underline{I} - 2\frac{vv^T}{v^Tv} = \underline{I} - 2uu^T} \quad \Big| \; u = \frac{v}{\|v\|}$$

iv) $u = \frac{v}{\|v\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

v)
$$H = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}}$$

vi)
$$H \cdot A = R' = \begin{bmatrix} -3 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{bmatrix}$$

vii) i) - vi) mit $\begin{bmatrix} * & * \\ \underset{\neq 0}{\boxed{*}} & * \end{bmatrix}$ auf $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_2'$

$$\Rightarrow H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & H_2' \end{bmatrix}$$

$$H_2 \cdot R' = H_2 \cdot H_1 \cdot A = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 & * & * \\ 0 & \Delta & \Delta \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}}}$$

$$Q = (H_2 \cdot H_1)^T = H_1^T H_2^T$$

Untervektorraum & Regeln:

$U \neq \emptyset$ ist ein UVR, falls er eine Teilmenge eines VR ist, und: $\forall a,b \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $a+b \in U$

(ii) $\alpha \cdot a \in U$

Beispiel: $U = \{ A \in V \mid A^T = -A \}$, $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

Überprüfen $\forall U_1, U_2 \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $(U_1 + U_2)^T = U_1^T + U_2^T = -U_1 - U_2 = -(U_1 + U_2)$ ✓

(ii) $(\alpha \cdot U_1)^T = U_1^T \alpha^T = \alpha U_1^T = -(\alpha U_1)$ ✓

Basis beweisen: $B = \{ b^{(1)} = 1,\ b^{(2)} = x,\ b^{(3)} = x^2 \}$

Beispiel: $\mathcal{P}_3$, $C = \{ c^{(1)} = 2,\ c^{(2)} = x^2 + x - 1,\ c^{(3)} = 2x^2 - 5x \}$

1)
$$\left.\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{2} c^{(1)} \\ x &= \frac{2c^{(2)} - c^{(3)} + c^{(1)}}{7} \\ x^2 &= \frac{5c^{(2)} + c^{(3)} + \frac{5}{2} c^{(1)}}{7} \end{aligned}\right\}$$

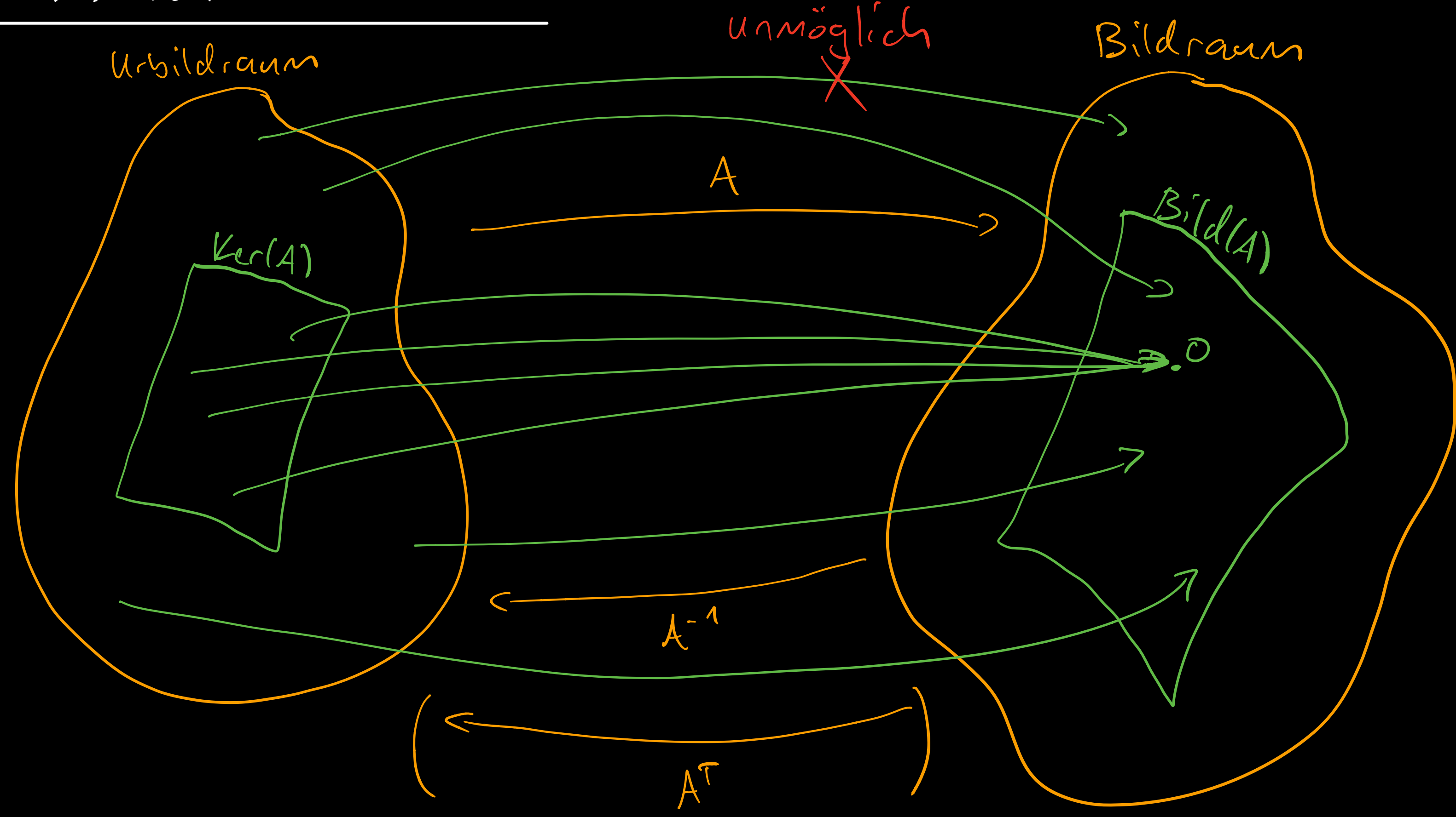
C ist ein ES & minimal, da 3 Vektoren & $\mathcal{P}_3$ 3-dimensional

$\Rightarrow$ <u>Basis</u>

2)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Voller Rang $\Rightarrow$ lin. unabh. & erzeugend, da 3 Vektoren & $\mathcal{P}_3$ 3-dim. $\Rightarrow$ <u>Basis</u>

Basis von Kern & Bild:



$$Ax = b$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ker(A): $Ax = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_4 = s \in \mathbb{R} \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_2 = \frac{3s-3t}{2} \end{array} \quad x_1 = \frac{-x_2 - x_3}{2} = \frac{t}{4} - \frac{3s}{4}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \frac{1}{4}\begin{bmatrix} t-3s \\ 6s-6t \\ 4t \\ 4s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

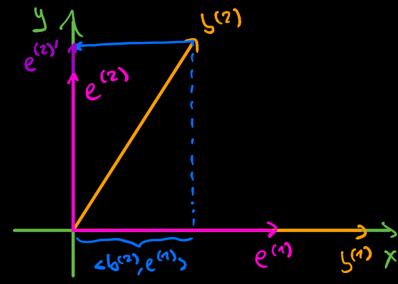
$$= \left\{ \frac{1}{4}t\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}s\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \underline{\underline{\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Bild(A):

$$b = Ax = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Bild}(A) = \underline{\underline{\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:



(i) $e^{(1)} = \dfrac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)}\rangle \cdot e^{(1)}$ & $e^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)}\rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)}\rangle e^{(2)}$ & $e^{(3)} = \dfrac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

usw.

Beispiel: $\mathcal{P}_5$ mit $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$, $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$

Gram-Schmidt:

i) $e^{(1)} = \dfrac{1}{\|1\|} = \underline{\underline{1}}$

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \sqrt{\int_0^1 1\,dx} = \sqrt{[x]_0^1} = 1$$

ii) $e^{(2)'} = 3x^4 - \langle 3x^4, 1\rangle \cdot 1 = 3x^4 - \int_0^1 3x^4\,dx$

$$= 3x^4 - \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \underline{3x^4 - \frac{3}{5}}$$

$$e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|} = \underline{\underline{\frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}}}$$

$$\|e^{(2)'}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25}\,dx}$$

$$= \sqrt{\left[x^9 - \frac{18}{25}x^5 + \frac{9}{25}x\right]_0^1} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Verallgemeinerte Norm:

$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

$\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Verallgemeinertes Skalarprodukt:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto \langle a, b \rangle$$

$\forall x, y, z \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, \lambda z \rangle$
$= \underline{\lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle}$

$\langle \lambda x, \lambda y \rangle$
$= \lambda^2 \langle x, y \rangle$

$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$
n: Anz. Zeilen von A!

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Induzierte Norm:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $a \in V$

$$\Rightarrow \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ symm.}$$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt

$\forall x,y,z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

i) $\langle x, \lambda(y+z)\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle x,z\rangle$

$$x^T A(\lambda(y+z)) = x^T A(\lambda y + \lambda z) = \lambda x^T A y + \lambda x^T A z \quad \checkmark$$

ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

$$x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x \quad \checkmark \quad \text{falls } A \text{ symm.}$$

iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$

$$x^T A x \geq 0, \quad x^T A x = 0 \iff x = 0 \quad \checkmark$$

$\hookrightarrow$ A positiv definit $\iff$ Alle EW von $A > 0$

Hurwitz-Kriterium: (Nur für symm. Matrizen!)

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{\det(2) = 2 > 0}, \quad \det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \underline{6 > 0}$$

$\Rightarrow$ A pos. def. nach Hurwitz!

A^k – Eigenwertproblem & Diagonalisieren:

$$A^k x = (TDT^{-1})^k x$$ falls A min. halbeinfach ist

$$= TD\underbrace{T^{-1}T}_{I}D\underbrace{T^{-1}T}_{I}\dots\underbrace{T^{-1}T}_{I}DT^{-1}x$$

$$= TD^kT^{-1}x$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \emptyset \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & & & \emptyset \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n \end{bmatrix} \cdot \;\dots\; \cdot \begin{bmatrix} d_1 & & & \emptyset \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^k & & & \emptyset \\ & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n^k \end{bmatrix}$$

$$= TD^k\underbrace{T^{-1}x}_{z}$$

$T^{-1}x = z$

$Tz = x$

$$= TD^kz$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T^{-1}"] & B \\ C \arrow[r, "D"'] & C \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10}x \overset{?}{=}$$

$$\text{EW: } \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$Ax = \lambda x$$

$$= -\lambda \cdot \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda [\lambda^2 - 2\lambda - 2] + 2[2\lambda - 2] + [2\lambda + 4]$$

$$= -\lambda [\lambda^2 - 2\lambda - 2] + 6\lambda = -\lambda [\lambda^2 - 2\lambda - 8]$$

$$(\lambda \pm a)(\lambda \pm b)$$

$$= -\lambda (\lambda + 2)(\lambda - 4)$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -2$

$\lambda_3 = 4$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

EV: $(A - \lambda I)x = 0$

$$\lambda_1 = 0: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_0 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2 = -2: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_{-2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\} \qquad \Rightarrow T = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = \underbrace{T D^{10} T^{-1}}\, x = T D^{10} z \qquad Tz = x$$

$$z: \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 2\end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow z_3 = 0$$

$$z_2 = 2 \qquad \Rightarrow z = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$z_1 = 1$$

$$A^{10}x = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1024 & 0\\ 0 & 0 & \star\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2048\\0\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}2048\\2048\\0\end{bmatrix}}}$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y' = Ay \overset{\text{Euler}}{\Longrightarrow} y(t) = e^{At} y_0 \quad | \; y_0 = y(0)$$

gekoppelt
$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

$$y' = Ay = TDT^{-1}y$$ falls A min. halbeinfach

$$\underbrace{T^{-1}y'}_{z'} = D\underbrace{T^{-1}y}_{z}$$

$$T^{-1}y = z$$
$$\underbrace{T}\, z = y$$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{A} & B \\ \downarrow T^{-1} & & \uparrow T \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C} \end{array}$$

$$z' = Dz$$

enthoppelt
$$\begin{cases} z_1' = d_1 z_1 \\ z_2' = \quad d_2 z_2 \\ \vdots \\ z_n' = \quad\quad d_n z_n \end{cases}$$

Euler-Ansatz

$$\Longrightarrow z(t) = e^{\lambda t} c$$

$$z_1(t) = e^{d_1 t} c_1$$ $d_1 = \lambda_1 \leftrightarrow$ 1. EW von A

$$z_2(t) = e^{d_2 t} c_2$$
$$\vdots$$
$$z_n(t) = e^{d_n t} c_n$$

$$z(t) = e^{Dt} z_0 \quad | \; z_0 = z(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$y = T \cdot z = T e^{Dt} z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & & \emptyset \\ & e^{d_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & e^{d_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{\lambda_3 t} \begin{bmatrix} 1 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} 1 \\ a_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

$c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ müssen mittels AWP bestimmt werden

$$\Rightarrow \quad y(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots + c_n \begin{bmatrix} 1 \\ a_n \\ 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \dots \quad \Rightarrow c_1 = ?, \; c_2 = ?, \; \dots, \; c_n = ?$$

Beispiel:

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $y' = Ay$

b) AWP: $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Prüfung HS18:

1. [6 Punkte] In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu A aus den Eigenvektoren.

c) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

~20min

A symm.

$$e^A = T e^D T^{-1}$$

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{TD^kT^{-1}}{k!}$$

$$= T\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!}\right)T^{-1} = T e^D T^{-1}$$

$$D^0 + D^1 + \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \emptyset \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & & & \emptyset \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_1^2}{2} & & & \emptyset \\ & \frac{d_2^2}{2} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \frac{d_n^2}{2} \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_1^k}{k!} & & & \emptyset \\ & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_2^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_n^k}{k!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1} & & & \emptyset \\ & e^{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & e^{d_n} \end{bmatrix} = e^D$$

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{EW}: \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] - \left[-\lambda - 1\right] + \left[\lambda + 1\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 6\lambda - 6 = (1-\lambda)\left[\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}_{=6} - 6\right]$$

$$\lambda_1 = \underline{\underline{1}}, \quad \lambda_2 = \underline{\underline{-1}}, \quad \lambda_3 = \underline{\underline{4}}$$

$$\text{EV}: (A - \lambda I)x = 0$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = -2x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$$\underline{\underline{E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$$\underline{\underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

b) $B = \{ E_1, E_{-1}, E_4 \}$

ODER

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c) $$e^A = T e^D T^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4e + 2e^4 & -2e + 2e^4 & -2e + 2e^4 \\ -2e + 2e^4 & e + 3e^{-1} + 2e^4 & e - 3e^{-1} + 2e^4 \\ -2e + 2e^4 & e - 3e^{-1} + 2e^4 & e + 3e^{-1} + 2e^4 \end{bmatrix}$$

2. [6 Punkte] Gegeben seien

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix A und den Vektor b an.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

Hinweis: Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen U und V in Teilaufgabe **c**). Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

d) [1 Punkt] Bestimmen Sie ein x sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$ gilt.

~35 - 40min

$Ax = b$

$USV^T x = b$

$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$

$S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \hat{S}V^T x \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ \cdots \\ \boxed{d_1} \end{bmatrix}$ = Der Fehler/ das Residuum

$\hat{S}V^T x = d_0$

$x = V\hat{S}^{-1} d_0$

a) $A^T A x = A^T b$

b)

$V: A^TA = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 156 & -108 \\ -108 & 219 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}$

U, V orthogonal

$S = \mathrm{diag}(\underset{\sigma_i}{\underset{\shortparallel}{\sqrt{\lambda_i}}})$, λ_i EW A^TA oder AA^T

U: EV von AA^T

V: EV von A^TA

$u^{(i)} = \frac{A \cdot v^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$

$v^{(i)} = \frac{A^T u^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$

EW: $\det(A^TA - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0 = \det\left(\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52-25\lambda & -36 \\ -36 & 73-25\lambda \end{bmatrix}\right)$

$= \underbrace{(52-25\lambda)(73-25\lambda)}_{=36^2} - 36^2$

$(2\cdot 2\cdot 3\cdot 3)^2$

$\lambda = 1: \quad 27 \cdot 48$

$$3\cdot3\cdot3 \cdot 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3 = (2\cdot2\cdot3\cdot3)^2$$

$\lambda_1 = 4 \quad \sigma_1 = \underline{\underline{2}}$

$\lambda_2 = 1 \quad \sigma_2 = \underline{\underline{1}}$

$\lambda = 2: \quad 2 \cdot 23$

$\lambda = 3: \quad -23 \cdot -2$

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 4: \quad -48 \cdot -27$

$$-(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3)\cdot-(3\cdot3\cdot3) = (2\cdot2\cdot3\cdot3)^2$$

c)

$$S = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

V:

EV: $(A^TA - \lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 4: \quad \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ -36 & -27 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x_2 \in \mathbb{R}, \; x_1 = -\frac{3}{4}x_2$

$$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\text{span}\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_2 = 1: \quad \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ -36 & 48 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x_2 \in \mathbb{R}, \; x_1 = \frac{4}{3}x_2$

$$\Rightarrow E_1 = \underline{\text{span}\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = V^T}}$$

U:

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}}{1} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -50 \\ -25 \\ 50 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(3)} = u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow U = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}}$$

d)

$$Ax = b$$
$$USV^T x = b$$
$$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$
$$x = V\hat{S}^{-1} d_0$$

$$d = U^T b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ \hline -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}d_0 \\ \}d_1 \end{matrix} \rightarrow \text{Fehler}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \}\hat{S} \quad , \quad \hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{S}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)$$

(Was, wenn $\hat{S}$ <u>nicht</u> invertierbar ist? $\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{S}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)

$$x = V\hat{S}^{-1}d_0 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -13 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}}}$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [1.5 Punkte] Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

Im Folgenden seien α und β nun wie in Teilaufgabe **a)**.

b) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Hinweis: Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

c) [1 Punkt] Berechnen Sie $|\det(A)|$.

~2-5min 1.

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0 = 2 + 2\beta \quad \Rightarrow \beta = \underline{\underline{-1}}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0 = 2\alpha - 4 + \beta \quad \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

b) A ist orthogonal. Finde $A = QR = A \cdot I$

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}}$$

$Q^T A = R$

$$\sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{16}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

c) $|\det A| = |\det(Q \cdot R)| = \underbrace{|\det Q|}_{\pm 1} |\det R| = |\det R| = \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\, \mathrm{d}y\right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.

d) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ (T überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

~20-25min 2.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_3 \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend right, "k_2"'] & \mathcal{P}_3 \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend left, "k_2"] \\
\mathcal{B}_1 \arrow[r, "F"] & \mathcal{B}_1 \\
\mathcal{B}_2 \arrow[r, "Q"] \arrow[u, "T"] & \mathcal{B}_2 \arrow[u, "T"]
\end{tikzcd}$$

a) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert, da:

$\underline{\mathcal{F}(1) = 1 \in \mathcal{P}_3}$, $\underline{\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}x \in \mathcal{P}_3}$,

$$\boxed{\begin{aligned} p(x) &= 1 \\ p(x) &= x \\ p(x) &= x^2 \end{aligned}}$$

$$\mathcal{F}(x^2) = x^2 - \left(\int_0^1 y \cdot [x^2]'(y)\, dy\right) x$$
$$= x^2 - \left(\int_0^1 y \cdot 2y\, dy\right) x$$
$$= x^2 - \left[\frac{2}{3}y^3\right]_0^1 x = \underline{x^2 - \frac{2}{3}x \in \mathcal{P}_3}$$

Zeigen Linearität von $\mathcal{F}$:

$\forall a, b \in \mathcal{P}_3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

(ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

Überprüfen (i) & (ii):

$$\mathcal{F}(a + \alpha b) = (a + \alpha b) - \left(\int_0^1 y [a + \alpha b]'(y)\, dy\right) x$$

$p(x) = a + \alpha b$

$$= a + \alpha b - \left(\int_0^1 y\left(a'(y) + \alpha b'(y)\right) dy\right) x$$

$$= a + \alpha b - \left(\int_0^1 y\, a'(y)\, dy\right) x - \alpha\left(\int_0^1 y\, b'(y)\, dy\right) x$$

$$= a - \left(\int_0^1 y\, a'(y)\, dy\right) x + \alpha\left[b - \left(\int_0^1 y\, b'(y)\, dy\right) x\right] \square$$

b) $B_1 \xrightarrow{F} B_1$

$$\begin{tikzcd} P_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_1"] & P_3 \arrow[d, "k_1"] \\ B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \end{tikzcd}$$

$$1 \xrightarrow{F} 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$$

$$x \xrightarrow{F} \tfrac{1}{2}x = 0\ 1 + \tfrac{1}{2}\ x + 0\ x^2$$

$$x^2 \xrightarrow{F} x^2 - \tfrac{2}{3}x = 0\cdot 1 - \tfrac{2}{3}\cdot x + 1\ x^2$$

$$\Rightarrow F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{B_1} \Leftrightarrow a + bx + cx^2$$

$$F\cdot x = F\left(a\overset{1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + b\overset{x}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + c\overset{x^2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}\right)$$

$$= a\underset{1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + b\underset{\frac{1}{2}x}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}} + c\underset{x^2 - \frac{2}{3}x}{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= a + \left(\tfrac{1}{2}b - \tfrac{2}{3}c\right)x + cx^2$$

c) $B_1 = \{1, x, x^2\}$

$B_2 = \{\underset{b^{(1)}}{x-1}, \underset{b^{(2)}}{x+1}, \underset{b^{(3)}}{x^2-1}\}$

1)
$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2} \\ x &= \frac{b^{(2)} + b^{(1)}}{2} \\ x^2 &= b^{(3)} + \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2} \end{aligned}\right\}$$

B_2 ist ein ES & minimal, da 3 Vektoren und P_3 3-dimensional $\Rightarrow$ Basis

c)
$$\begin{array}{ccc|c} b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} & \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{G} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Voller Rang
$\Rightarrow$ lin. unabh. & ES, da 3 Vekt. & $\mathcal{B}_3$ 3-dim.
$\Rightarrow$ Basis

d) $B_2 \xrightarrow{T} B_1$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend right, "k_2"'] & \mathcal{B}_3 \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend left, "k_2"] \\ B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \\ B_2 \arrow[u, "T"] \arrow[r, "Q"] \arrow[ur, "P"] & B_2 \arrow[u, "T"] \end{tikzcd}$$

$x-1 \xrightarrow{I} x-1 = -1 \cdot 1 + 1x + 0x^2$

$x+1 \xrightarrow{I} x+1 = +1 \cdot 1 + 1x + 0x^2$

$x^2-1 \xrightarrow{I} x^2-1 = -1 \cdot 1 + 0x + 1x^2$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P = F \cdot T$

(Für den Fall, dass man P berechnen müsste :)

$B_2 \xrightarrow{P} B_1$

Hier muss man nichts rechnen

$x-1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x - 1 = -1 \cdot 1 + \frac{1}{2}x + 0x^2$

$x+1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x + 1 = +1 \cdot 1 + \frac{1}{2}x + 0x^2$

$x^2-1 \xrightarrow{F} x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = -1 \cdot 1 - \frac{2}{3}x + 1x^2$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. [6 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

a) [1 Punkt] Mindestens ein Eigenwert von A ist strikt negativ.

b) [2 Punkte] Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top Ax < 0$.

c) [3 Punkte] Die Aussagen in a) und b) gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

Zeit: ? Als letztes

a) $\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in (1,n)$

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_i \cdot \ldots \cdot \lambda_n < 0$

$\Rightarrow \exists i \in (1,n): \lambda_i < 0$ $\square$

b) x der EV zu $\lambda_i < 0$

$x^T A x = x^T \lambda_i x = \lambda_i \underbrace{x^T x}_{>0} = \underbrace{\lambda_i}_{<0} \underbrace{\|x\|^2}_{>0} < 0$ $\square$

c) $\lambda_i \in \mathbb{C}$, aber komplex konjugiert!

a) $\det(A) = \underbrace{\lambda_1 \cdot \overline{\lambda_1}} \cdot \underbrace{\lambda_2 \overline{\lambda_2}}_{>0} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\lambda_i}_{<0} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\lambda_k \overline{\lambda_k}}_{>0} < 0$

$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 > 0$

$\Rightarrow \exists i \in (1,k): \lambda_i < 0$ $\square$

b) folgt wie oben